Άσκηση 1

Το διάνυσμα θέσης υλικού σημείου δίνεται από την σχέση

$$\vec{r} = \bar{\alpha}_1 + (\bar{b}_1 - \bar{\alpha}_1)\, t$$

όπου $\bar{\alpha}_1$ και $\bar{b}_1$ σταθερά διανύσματα. Να δ.ο. η ταχύτητα, $\vec{u}$, του υλικού σημείου είναι σταθερή κατά διεύθυνση.

Λύση

Η ταχύτητα $\vec{u}$ του υλικού σημείου δίνεται από: $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (\bar{b}_1 - \bar{\alpha}_1)$

Επειδή τα $\bar{\alpha}_1, \bar{b}_1$ είναι σταθερά διανύσματα, το $\bar{b}_1 - \bar{\alpha}_1$ θα είναι διάνυσμα σταθερής διεύθυνσης. Άρα η $\bar{u}$ είναι σταθερή κατά διεύθυνση.

Άσκηση 1Β

Όμοια αν η $\vec{u} = \bar{\alpha}_1 + \bar{b}_1 t$ και τα $\bar{\alpha}_1$ και $\bar{b}_1$ είναι σταθερά διανύσματα τότε να δ.ο. η $\vec{\alpha}$ είναι σταθερή κατά διεύθυνση.

Άσκηση 2

Το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{u}(t)$ υλικού σημείου είναι σταθερό κατά μέτρο. Να δ.ο. η επιτάχυνση του υλικού σημείου $(\vec{\alpha}(t))$ είναι κάθετη στο διάνυσμα της ταχύτητας.

Λύση

Επειδή το διάνυσμα της ταχύτητας του υλικού σημείου είναι σταθερό κατά μέτρο θα ισχύει:

$$|\vec{u}|^2 = \text{σταθερό} \Rightarrow |\vec{u}|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = \text{σταθερό}$$

Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο προκύπτει:

$$\frac{d}{dt}\left(|\vec{u}|^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{u}\cdot\vec{u}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\bar{u}\cdot\frac{d\bar{u}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{\alpha} = 0 \quad (1) \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{\alpha}$$

Από (1) συμπεραίνουμε ότι η επιτάχυνση του υλικού σημείου είναι κάθετη στο διάνυσμα της ταχύτητας.

Άσκηση 3

Αν το διάνυσμα θέσεως $\bar{r}(t)$, υλικού σημείου έχει σταθερή διεύθυνση $\bar{r}_0$, δ.ο. η ταχύτητα $\vec{u}$ είναι "παράλληλη" προς το $\bar{r}(t)$.

Λύση

Το διάνυσμα $\bar{r}(t)$ γράφεται ως:

$$\bar{r}(t) = |\bar{r}(t)|\,\bar{r}_0 \quad , \text{ όπου } |\bar{r}_0| = 1 \quad (\text{μοναδιαίο διάνυσμα θέσης})$$

Πρέπει να δ.ο.

$$\vec{u} = \frac{d\bar{r}}{dt} = k\,\bar{r}_0 \quad \text{όπου } k \text{ είναι μια βαθμωτή ποσότητα}$$

Πράγματι

$$\vec{u} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[|\bar{r}|\,\bar{r}_0\right] = \frac{d|\bar{r}|}{dt}\,\bar{r}_0 + |\bar{r}|\,\frac{d\bar{r}_0}{dt}$$

και από υπόθεση έχουμε ότι $\dfrac{d\bar{r}_0}{dt} = 0$

Οπότε $\vec{u} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d|\bar{r}|}{dt}\,\bar{r}_0 = k\,\bar{r}_0$ και δεδομένου ότι $\dfrac{d}{dt}|\bar{r}| = |\bar{u}|$

έχουμε: $\vec{u} = \dfrac{d\bar{r}}{dt} = |\bar{u}|\,\bar{r}_0$

Άσκηση 4

Να δ.ο. μια κίνηση είναι επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη στο επίπεδο ανάλογα με το αν η γωνία, θ, των διανυσμάτων της ταχύτητας, $\bar{u}$, και της επιτάχυνσης, $\bar{\alpha}$, είναι οξεία ή αμβλεία, αντιστοίχως.

Λύση

Έχουμε:

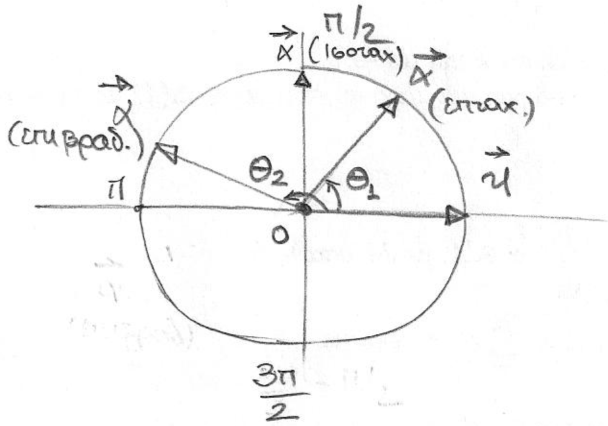
$$\frac{d|\vec{u}|^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{u}\cdot\bar{u}) = \frac{d\bar{u}}{dt}\cdot\bar{u} + \bar{u}\cdot\frac{d\bar{u}}{dt} = 2\bar{u}\cdot\frac{d\bar{u}}{dt} = 2\bar{u}\cdot\bar{\alpha} =$$

$$= 2|\bar{u}||\bar{\alpha}|\cos\underbrace{(\bar{u},\bar{\alpha})}_{\theta} = 2|\bar{u}||\bar{\alpha}|\cos\theta$$

Η ποσότητα $\frac{d}{dt}|u|^2$ είναι λοιπόν θετική όταν $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

και αρνητική για $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$

Για $\theta=$ σταθερό $=\frac{\pi}{2}$, έχουμε ταχύτητα σταθερού μέτρου, δηλαδή ισοταχής κίνηση.



Παρατήρηση

Το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως $\bar{u}\cdot\bar{\alpha}=|\bar{u}||\bar{\alpha}|\cos\theta$ όπου $0\leq\theta\leq\pi$. οπότε εξετάζουμε από 0 έως π και ότι ισχύει σε αυτό το διάστημα θα ισχύει και για τα αντίθετα τόξα, αφού έχουν το ίδιο συνημίτονο.

Άσκηση 5

Αν το διάνυσμα θέσης υλικού σημείου είναι: $\vec{r}(t)=\sin t\,\vec{x_0}+\cos t\,\vec{y_0}+2t\,\vec{z_0}$, να υπολογιστούν: (1) η ταχύτητα, (2) το μέτρο της ταχύτητας, (3) η επιτάχυνση και (4) το μέτρο της επιτάχυνσης.

Λύση.

(1) Παραγωγίζω κάθε συνιστώσα του διανύσματος θέσης, $\vec{r}$, χωριστά.

$$\vec{u}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}(\sin t)\,\bar{x_0}+\frac{d}{dt}(\cos t)\,\bar{y_0}+\frac{d}{dt}(2t)\,\bar{z_0}=$$

$$=\cos t\,\bar{x_0}-\sin t\,\bar{y_0}+2\,\bar{z_0} \quad (*)$$

(2) Το μέτρο του $\vec{u}$ ορίζεται ως:

$$|\bar{u}|=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$$ όπου $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ είναι οι συνιστώσες του $\dot{\vec{r}}$, οπότε:

$$|\vec{u}|=|\dot{\vec{r}}|=\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t+4}=\sqrt{5}$$

(3) Η δεύτερη παράγωγος του διανύσματος θέσης $\bar{r} = \bar{r}(t)$ ορίζεται ως

$$\vec{\alpha} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right) \overset{\text{από } (*)}{=} \frac{d}{dt}\left(\cos t\,\bar{x}_0 - \sin t\,\bar{y}_0 + 2\bar{z}_0\right) =$$

$$= -\sin t\,\bar{x}_0 - \cos t\,\bar{y}_0 + 0\,\bar{z}_0 = -\sin t\,\bar{x}_0 - \cos t\,\bar{y}_0 .$$

(4) Το μέτρο της $\vec{\alpha} = \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ είναι:

$$\left|\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1.$$

$\boxed{\text{Άσκηση 6}}$ (Φυλ. 1)

Αν το διάνυσμα θέσης υλικού σημείου είναι: $\bar{r}(t) = \left[\ln(t^3+1),\, e^{-2t},\, t^2\right]$ να υπολογιστούν: (1) η ταχύτητα του (2) το μέτρο της ταχύτητας του, (3) η επιτάχυνση του, (4) το μέτρο της επιτάχυνσης του τη χρονική στιγμή $t=0$.

Λύση

(1) Παραγωγίζοντας κάθε συνιστώσα του διανύσματος θέσης, $\vec{r}$, έχω ότι:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\ln(t^3+1),\, e^{-2t},\, t^2\right] = \left[\frac{d}{dt}\ln(t^3+1),\, \frac{d}{dt}e^{-2t},\, \frac{d}{dt}t^2\right] =$$

$$= \left[\frac{3t^2}{t^3+1},\, -2e^{-2t},\, 2t\right].$$ Για $t=0$ λαμβάνουμε:

$$\left.\frac{d\bar{r}}{dt}\right|_{t=0} = [0, -2, 0]$$

(2) Το μέτρο της $\vec{u} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ για $t=0$ είναι: $\left.\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|\right|_{t=0} = \sqrt{4} = 2$

(3) Η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ του υλικού σημείου:

$$\vec{\alpha} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{3t^2}{t^3+1}, -2e^{-2t}, 2t\right) =$$

$$= \left(\frac{-3t^4+6t}{(t^3+1)^2}, 4e^{-2t}, 2\right)$$

Για $t=0$ έχουμε $\left.\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|_{t=0} = (0, 4, 2)$

(4) Για $t=0$ το μέτρο της $\vec{\alpha} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ είναι: $|\vec{\alpha}| = \left.\left|\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|\right|_{t=0} =$

$$= \left[\sqrt{\left(\frac{-3t^4+6t}{(t^3+1)^2}\right)^2 + (4e^{-2t})^2 + 2^2}\right]_{t=0} = \sqrt{0+16+4} =$$

$$= \sqrt{20}$$

Άσκηση 7 (φυλ. 2)

Έστω δύο κινούμενα υλικά σημεία και $\bar{r}_1(t)$ το διάνυσμα θέσης του πρώτου και $\bar{r}_2(t)$ το διάνυσμα θέσης του δεύτερου. Η επιτάχυνση $\bar{\alpha}_1(t)$ του πρώτου είναι παράλληλη στο διάνυ. θέσης του δεύτερου δηλ. $\bar{\alpha}_1(t) \,//\, \bar{r}_2(t)$. Το διάνυσμα της επιτάχυνσης $\bar{\alpha}_2(t)$ του δεύτερου είναι παράλληλο στο διάνυσμα θέσης του πρώτου, δηλ. $\bar{\alpha}_2(t) \,//\, \bar{r}_1(t)$.
Να δ.ο. $\bar{r}_1(t) \times \bar{u}_2(t) - \bar{u}_1(t) \times \bar{r}_2(t) =$ σταθερό διάνυσμα.

Λύση Θέτουμε:

$$\bar{B} = \bar{r}_1(t) \times \bar{u}_2(t) - \bar{u}_1(t) \times \bar{r}_2(t) \rightarrow \frac{d\bar{B}}{dt} =$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_1 \times \bar{u}_2 - \bar{u}_1 \times \bar{r}_2) \Rightarrow \frac{d\bar{\beta}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r}_1 \times \bar{u}_2) - \frac{d}{dt}(\bar{u}_1 \times \bar{r}_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{\beta}}{dt} = \frac{d\bar{r}_1}{dt} \times \bar{u}_2 + \bar{r}_1 \times \frac{d\bar{u}_2}{dt} - \frac{d\bar{u}_1}{dt} \times \bar{r}_2 - \bar{u}_1 \times \frac{d\bar{r}_2}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{\beta}}{dt} = \cancel{\bar{u}_1 \times \bar{u}_2} + \bar{r}_1 \times \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1 \times \bar{r}_2 - \cancel{\bar{u}_1 \times \bar{u}_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{\beta}}{dt} = \underbrace{\bar{r}_1 \times \bar{\alpha}_2}_{=0} - \underbrace{\bar{\alpha}_1 \times \bar{r}_2}_{=0} \Rightarrow \frac{d\bar{\beta}}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{\beta} = \bar{C} \text{ (σταθερό διάνυσμα)}$$

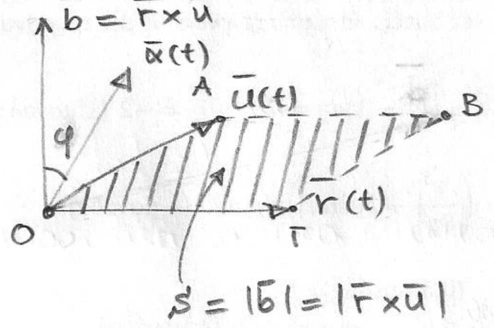
γιατί $\bar{r}_1 // \bar{\alpha}_2$ γιατί $\bar{r}_2 // \bar{\alpha}_1$

Άσκηση 8

Να δειχθεί ότι η σχέση $(\bar{r} \times \bar{u}) \cdot \bar{\alpha} = 0$ ισχύει αν τα διανύσματα θέσης, $\vec{r}$, ταχύτητας, $\vec{u}$, και επιτάχυνσης, $\vec{\alpha}$, είναι συνεπίπεδα.

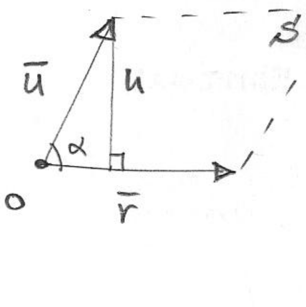
Λύση (Αναλυτικά και βασικές έννοιες διανυσμάτων)

Γενικά έχουμε για τρία διανύσματα ότι



$\bar{r} \times \bar{u} = \bar{b}$ τότε το μέτρο του $|\bar{b}| = |\bar{r} \times \bar{u}| = S$ αντιπροσωπεύει το εμβαδό της περιοχής ΟΑΒΓ (πιο αναλυτικά)

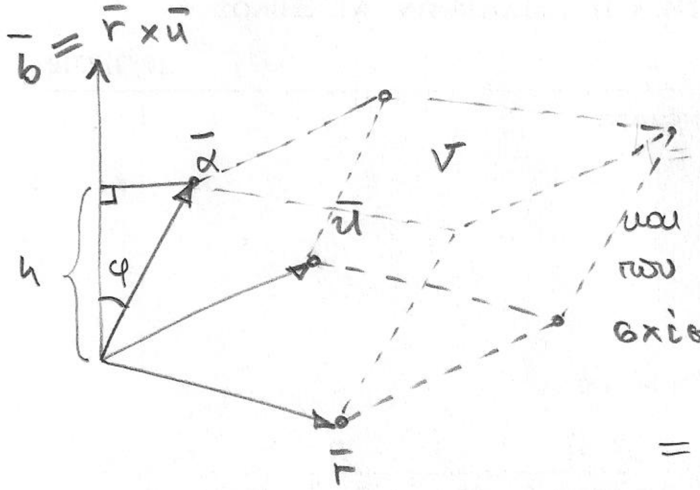
(Πιο αναλυτικά)



$S = r \cdot h$ όμως $h = u \sin\alpha$ άρα

$S = r u \sin\alpha = |\bar{r} \times \bar{u}|$

Το $\bar{b}=\bar{r}\times\bar{u}$ είναι κάθετο στα διανύσματα $\bar{r}$ και $\bar{u}$ και σχηματίζει γωνία φ με το διάνυσμα της επιτάχυνσης $\bar{\alpha}(t)$. Δηλαδή έχουμε ότι:



Ισχύει ότι:
$h=|\bar{\alpha}|\cos\varphi$
και ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που δημιουργείται δίνεται από την σχέση: $V=|\bar{d}||\bar{\alpha}||\cos\varphi|=$

$=|\bar{d}\cdot\bar{\alpha}|=|(\bar{r}\times\bar{u})\cdot\bar{\alpha}|$

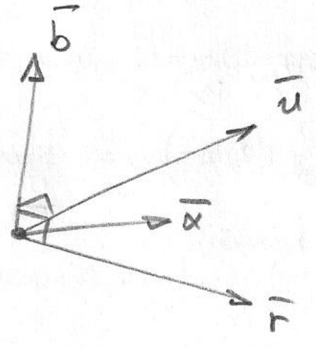
Οπότε ο όγκος του παραλληλεπιπέδου μεταξύ των τριών διανυσμάτων $\bar{r},\bar{u},\bar{\alpha}$ ισούται με το μέτρο του τριπλού γινομένου:

$$V=|(\bar{r}\times\bar{u})\cdot\bar{\alpha}|$$

Όταν ο όγκος αυτός είναι μηδέν, δηλαδή:

$V=|(\bar{r}\times\bar{u})\cdot\bar{\alpha}|=0$ μόνο όταν τα διανύσματα
(2ος τρόπος)
$\bar{r},\bar{u},\bar{\alpha}$ είναι συνεπίπεδα. Τότε έχουμε ότι $\bar{b}\cdot\bar{\alpha}=0$ άρα $\bar{b}\perp\bar{\alpha}$ και για να ισχύει αυτό σημαίνει ότι το $\bar{\alpha}$ πάνω στο επίπεδο των $\bar{r},\bar{u}$.

Σχηματικά:



για να είναι $\bar{b}\cdot\bar{\alpha}=0\Rightarrow$
$\Rightarrow\bar{b}\perp\bar{\alpha}$ δηλαδή στο σχήμα.

Άσκηση 9 (Φυλ. 3)

Αν το διάνυσμα θέσης υλικού σημείου είναι το $\bar{r}(t)=\bar{\alpha}_1\cos t+\bar{b}_1\sin t$, όπου $\bar{\alpha}_1$ και $\bar{b}_1$ είναι σταθερά διανύσματα, τότε τα $\vec{r}(t)$, $\vec{u}(t)$ και $\vec{\alpha}(t)$ είναι συνεπίπεδα.

Δηλαδή: $\bar{r}(t)\cdot\left(\vec{u}(t)\times\vec{\alpha}(t)\right)=0$

Λύση

Αφού τα $\bar{\alpha}_1$ και $\bar{b}_1$ είναι σταθερά διανύσματα ισχύει ότι:

$$\vec{u} = \frac{d\bar{r}}{dt} = -\bar{\alpha}_1 \sin t + \bar{b}_1 \cos t \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\bar{\alpha}_1 \cos t - \bar{b}_1 \sin t$$

Αρχικά υπολογίζω το: $\vec{u} \times \vec{\alpha} = \dfrac{d\bar{r}}{dt} \times \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2} =$

$$= (-\bar{\alpha}_1 \sin t + \bar{b}_1 \cos t) \times (-\bar{\alpha}_1 \cos t - \bar{b}_1 \sin t) =$$

$$= \underbrace{\bar{\alpha}_1 \times \bar{\alpha}_1}_{0} \sin t \cos t + \bar{\alpha}_1 \times \bar{b}_1 \sin^2 t - \bar{b}_1 \times \bar{\alpha}_1 \cos^2 t - \underbrace{\bar{b}_1 \times \bar{b}_1}_{= 0} \cos t \sin t =$$

(Παρατήρηση)

$$= \bar{\alpha}_1 \times \bar{b}_1 \sin^2 t - \underbrace{\bar{b}_1 \times \bar{\alpha}_1}_{\text{ιδιότητα}} \cos^2 t = \bar{\alpha}_1 \times \bar{b}_1 \sin^2 t + \bar{\alpha}_1 \times \bar{b}_1 \cos^2 t =$$

$$\bar{\alpha}_1 \times \bar{b}_1 = -\bar{b}_1 \times \bar{\alpha}_1$$

$$= (\sin^2 t + \cos^2 t)\, \bar{\alpha}_1 \times \bar{b}_1 = \bar{\alpha}_1 \times \bar{b}_1$$

Τώρα υπολογίζω το $\bar{r}(t) \cdot \left(\dfrac{d\bar{r}}{dt} \times \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2} \right) =$

$$= (\bar{\alpha}_1 \cos t + \bar{b}_1 \sin t) \cdot (\bar{\alpha}_1 \times \bar{b}_1) = \cos t \; \bar{\alpha}_1 \cdot (\bar{\alpha}_1 \times \bar{b}_1) +$$

$$+ \sin t \; \bar{b}_1 \cdot (\bar{\alpha}_1 \times \bar{b}_1)$$

όμως το διάνυσμα $\bar{c} = \bar{\alpha}_1 \times \bar{b}_1$ είναι κάθετο στα $\bar{\alpha}_1$ και $\bar{b}_1$ (βλέπε προηγούμενη άσκηση) οπότε $\bar{\alpha}_1 \cdot (\bar{\alpha}_1 \times \bar{b}_1) = 0$ και $\bar{b}_1 \cdot (\bar{\alpha}_1 \times \bar{b}_1) = 0$

επομένως το $\bar{r}(t) \cdot \left(\vec{u}(t) \times \vec{\alpha}(t) \right) = 0$.

Παρατήρηση

$\bar{\alpha} \parallel \bar{\alpha} \Longrightarrow \bar{\alpha} \times \bar{\alpha} = 0$. (Να το δείξετε) $\rightarrow \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = 0$.

παράλληλο ή συμπίπτει!!

Άσκηση 10

Η κίνηση ενός υλικού σημείου δίνεται από την τομή των επιφανειών:

$$\begin{cases} y = \sin 2\pi x \\ z = \cos 2\pi x \end{cases} \qquad (1)$$

1) Να βρεθεί η απόσταση που διανύει το υλικό σημείο μεταξύ των σημείων $(0,0,1)$ και $(1,0,1)$

2) Να γραφεί σε παραμετρική μορφή ως προς το μήκος τόξου, s, το διάνυσμα θέσης που δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$(2) \quad \bar{r}(t) = (3\cos t)\,\bar{x}_0 + (3\sin t)\,\bar{y}_0 \quad \text{για χρόνο } t$$

από $0 \leq t \leq 2\pi$.

Λύση

1) Για τη στοιχειώδη απόσταση, ds, ισχύει ότι:

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ \text{Από τις (1) έχουμε ότι} \quad dy &= 2\pi \cos 2\pi x \, dx \\ dz &= -2\pi \sin 2\pi x \, dx \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ds^2 = dx^2 + (2\pi \cos 2\pi x \, dx)^2 + (-2\pi \sin 2\pi x \, dx)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ds^2 = dx^2 + 4\pi^2 dx^2 \cos^2 2\pi x + 4\pi^2 dx^2 \sin^2 2\pi x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ds^2 = dx^2 + 4\pi^2 dx^2 \underbrace{(\cos^2 2\pi x + \sin^2 2\pi x)}_{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ds^2 = (1 + 4\pi^2)\, dx^2 \Rightarrow ds = \sqrt{1+4\pi^2}\, dx$$

Οπότε το μήκος τόξου της έλικας θα είναι $\int_{s_0}^{s_1} ds = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+4\pi^2}\, dx =$

από σημεία

$$= \int_0^1 \sqrt{1+4\pi^2}\, dx = \sqrt{1+4\pi^2}$$

2) Αν το διάνυσμα θέσης δίνεται στη μορφή $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, τότε το μήκος δίνεται από

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| dt.$$

Από τη χρονική στιγμή, $t_1=0$, μέχρι την τυχούσα χρονική στιγμή, $t_2=t$, το μήκος είναι:

$$S=\int_0^t \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| dt = \int_0^t \sqrt{(-3\sin t)^2+(3\cos t)^2}\, dt =$$

$$= \int_0^t \sqrt{(9\sin^2 t + 9\cos^2 t)}\, dt = \int_0^t \sqrt{9}\, dt = \int_0^t 3dt =$$

$$= 3t \Rightarrow S=3t \Rightarrow t=\frac{S}{3}$$

Συνεπώς μπορώ να αντικαταστήσω το χρόνο, t, με την νέα παράμετρο, S. Έτσι η εξίσωση (2) μπορεί να γραφεί:

$$\bar{r}(S)=\left(3\cos\frac{S}{3}\right)\bar{x}_0+\left(3\sin\frac{S}{3}\right)\bar{y}_0,$$ όπου τώρα

το S παίρνει τιμές $0\leq S\leq 6\pi$.

Άσκηση 11 (Φυλ. 4)

Υλικό σημείο κινείται στον άξονα των x και η επιτάχυνση του δίνεται από την σχέση $\ddot{x}(t)=3t^2+1$. Αν για $t=0$, $x=0$ και $\dot{x}=0$ να βρεθούν η ταχύτητα και η απόσταση που διένυσε το υλικό σημείο από την χρονική στιγμή $t=0$ μέχρι t.

του κάθε χρονική στιγμή

Λύση

Για να βρω την ταχύτητα του υλικού σημείου από την επιτάχυνση:

$$\ddot{x}(t)=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)\Rightarrow \int_{t_0}^{t}\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\dot{x}=u}\Big)dt=\int_{t_0}^{t}(3t^2+1)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(t)\Big|_{t_0}^{t}=\int_{t_0}^{t}(3t^2+1)dt=\left[\frac{\cancel{3}t^3}{\cancel{3}}+t\right]_{t_0=0}^{t}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(t)\Big|_0^t=u(t)-u(0)=t^3+t-0,$$ οπότε

$u(t)-0=t^3+t-0$ άρα η ταχύτητα του υλικού σημείου κάθε χρονική στιγμή θα είναι: $\boxed{u(t)=t^3+t}$

Για να βρώ την απόσταση, $S(t)$, που διένυσε το υλικό σημείο ολοκληρώνω την ταχύτητα του υλικού σημείου από $t=0$ έως t

$$S(t) = \int_0^t |u(t)|dt = \int_0^t |t^3+t|dt \Rightarrow$$ η συνάρτηση είναι και θετική αύξουσα στο $(0,+\infty)$

$$\Rightarrow S(t) = \left[\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}\right]_0^t \Rightarrow S(t) = x(t) - \cancel{x_0(t)}^{0} = \left[\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2} - 0\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \left[\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}\right]$$

Οπότε η απόσταση που διένυσε το υλικό σημείο δίνεται από την σχέση:

$$\boxed{S(t) = \frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}}$$

Άσκηση 12

Υλικό σημείο κινείται στον άξονα των x και η επιτάχυνση δίνεται από την σχέση $\ddot{x}(t) = 8\dot{x}^{1/2}$ προσδιορίστε την ταχύτητα του υλικού σημείου την χρονική στιγμή $t_1 = 10\,sec$. Αρχική συνθήκη για $t_0=0$, $\dot{x}=0$.

Λύση

Για να λυθεί η διαφορική εξίσωση $\ddot{x}(t) = \frac{d\dot{x}}{dt} = 8\dot{x}^{1/2}$, θέτουμε $\dot{x} = u$. Μετά την αντικατάσταση η Δ.Ε. ανάγεται στην:

$$\frac{d}{dt}u = 8u^{1/2} \Rightarrow \frac{du}{dt} = 8u^{1/2} \Rightarrow \frac{du}{u^{1/2}} = 8dt.$$

Η διαφορική εξίσωση που προκύπτει είναι χωριζομένων μεταβλητών.

Ολοκληρώνοντας έχουμε: $$\int_{u_0}^{u}\frac{du}{u^{1/2}} = \int_{t_0}^{t} 8dt \Rightarrow 2\sqrt{u}\Big|_{u_0}^{u} = 8t\Big|_{t_0=0}^{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{u} - 0 = 8t - 0 \Rightarrow 2\sqrt{u} = 8t \Rightarrow \sqrt{u} = 4t \Rightarrow$$

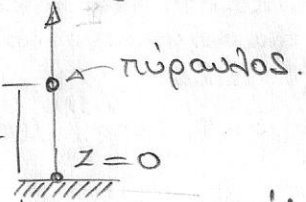
$$\Rightarrow u(t) = (4t)^2 \Rightarrow u(t) = 16t^2$$ και για $t_1 = 10\,sec$

η ταχύτητα του υλικού σημείου θα είναι :

$$u(10) = 16 \cdot 10^2 = 16 \cdot 100 \Rightarrow u(t_1 = 10s) = 1600\, m/s$$

Άσκηση 13 (Φυλ. 5)

Η επιτάχυνση ενός πυραύλου (υλικού σημείου) που κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω δίνεται από την σχέση $\ddot{z} = 6 + 0.02z$. Να υπολογιστεί ο χρόνος που χρειάζεται ο πύραυλος να φτάσει σε ύψος $z_1 = 100\,m$. (Αρχική ταχύτητα $\dot{z} = 0\,(m/s)$ και $z = 0\,(m)$ για $t = 0\,(s)$) / Σχηματικά:



Λύση

Ο πύραυλος θεωρείται σημειακός και η μάζα του πυραύλου είναι συγκεντρωμ. στο κέντρο του

Η διαφορική εξίσωση $\ddot{z} = 6 + 0.02z$, σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας γράφεται:

$$\ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dt} = \frac{d\dot{z}}{dz}\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{\dot{z}} = 6 + 0.02z \Rightarrow \frac{d\dot{z}}{dz}\dot{z} = 6 + 0.02z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{z}\,d\dot{z} = (6 + 0.02z)dz \Rightarrow$$ Θέτοντας $\dot{z} = w \Rightarrow$

$$\Rightarrow w\,dw = (6 + 0.02z)dz$$ χωριζόμενων μεταβλητών

$$\Rightarrow \int_{w_0}^{w} w\,dw = \int_{z_0}^{z} (6 + 0.02z)dz \Rightarrow \int_{0}^{w} w\,dw = \int_{0}^{z} (6 + 0.02z)dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\frac{w^2}{2}\right|_0^w = \left[6z + \frac{0.02}{2}z^2\right]_0^z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{w^2}{2} = 6z + 0.01z^2 \Rightarrow w^2 = 12z + 0.02z^2 \Rightarrow w = \sqrt{12z + 0.02z^2}$$

απ' εδώ υπολογίζω την ταχύτητα για $z_1 = 100m$

$$\Rightarrow w_1 = \sqrt{12\times 100 + 0.02\times 100^2} \Rightarrow w_1 = \sqrt{1400}\ \frac{m}{s},\quad z_1 = 100\ m$$

Για να βρω τον χρόνο έχω:

$$w = \frac{dz}{dt} = \sqrt{12z + 0.02z^2} \Rightarrow dt = \frac{dz}{\sqrt{12z+0.02z^2}} \Rightarrow$$

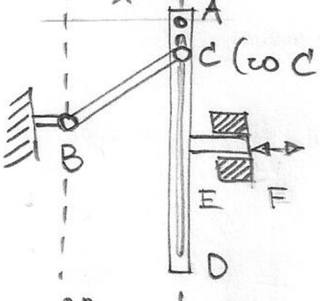
$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} dt = \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{12z+0.02z^2}} \Rightarrow t\Big|_0^{t_1} = \int_0^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{12z+0.02z^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1 = \int_0^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{12z+0.02z^2}} \quad \text{(άσκηση σπίτι)}$$

Άσκηση 14 (φυλ.6)

Η επιτάχυνση του σημείου, Α, που κινείται στην ευθεία x ορίζεται από την σχέση $\ddot{x} = -1.08\sin kt - 1.44\cos kt$, όπου $\ddot{x}$ και t εκφράζονται σε m/s^2 και sec αντίστοιχα, και $k = 3$ rad/s. Γνωρίζοντας ότι $x = 0.16$ m και $\dot{x}_0 = 0.36$ m/s όταν $t=0$, να υπολογιστούν η ταχύτητα και η θέση του σημείου Α όταν $t = 0.5$s. (Ο μηχανισμός EF ολισθαίνει και το BC περιστρέφεται με κέντρο το σταθερό σημείο Β).

Σχηματική αναπαράσταση



Λύση

$$\ddot{x} = f(t) = -1.08\sin kt - 1.44\cos kt \quad m/s^2$$

Ολοκληρώνοντας την (1) και λαμβάνοντας υπόψιν τις αρχικές συνθήκες, βρίσκουμε την ταχύτητα την τυχαία χρονική στιγμή, t.

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}\dot{x} \Rightarrow \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} d\dot{x} = \int_{t_0=0}^{t} f(t)dt = -1.08\int_0^t \sin kt\,dt - 1.44\int_0^t \cos kt\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \frac{1.08}{k}\cos kt\Big|_0^t - \frac{1.44}{k}\sin kt\Big|_0^t + \dot{x}_0 \Rightarrow \dot{x} = \frac{1.08}{\underset{\substack{\| \\ 3\,rad/s}}{k}}(\cos kt - 1) -$$

$$-\frac{1.44}{\underset{\substack{\| \\ 3\,rad/s}}{k}}(\sin kt - 0) + \underset{\substack{\| \\ 0.36\,m/s}}{\dot{x}_0} \Rightarrow \dot{x} = 0.36\cos kt - \cancel{0.36} - 0.48\sin kt + \cancel{0.36} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x}(t) = 0.36\cos kt - 0.48\sin kt} = g(t), \text{ ταχύτητα.}$$

$$\dot{x} = g(t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = g(t) \Rightarrow dx = g(t)dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} g(t)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - x_0 = \int_0^t u\,dt = 0.36\int_0^t \cos kt\,dt - 0.48\int_0^t \sin kt\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - \cancel{0.16} = \frac{0.36}{k}\sin kt\Big|_0^t + \frac{0.48}{k}\cos kt\Big|_0^t =$$

$$= \frac{0.36}{3}(\sin kt - 0) + \frac{0.48}{3}(\cos kt - 1) =$$

$$= 0.12\sin kt + 0.16\cos kt - \cancel{0.16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = 0.12\sin kt + 0.16\cos kt}$$

Για να υπολογίσω την ταχύτητα και την θέση του σημείου A όταν $t = 0.5s$ έχω ότι: $kt = 3\,0.5 = 1.5$ rad

οπότε $\dot{x} = 0.36\cos 1.5 - 0.48\sin 1.5 = -0.453$ m/s

και $x = 0.12\sin 1.5 + 0.16\cos 1.5 = 0.13$ m

Άσκηση 15

Η επιτάχυνση, α, ενός σημείου A που κινείται στον άξονα x ορίζεται από την σχέση: $\alpha(x) = \ddot{x}(x) =$ $= 200x(1 + kx^2)$, όπου $x = x(t)$, τα α και x εκφράζονται σε m/s^2 και m αντίστοιχα και k είναι σταθερά. Γνωρίζοντας ότι η ταχύτητα του σημείου A είναι $\dot{x} = 2.5$ m/s όταν $x = 0$ και 5 m/s όταν $x_1 = 0.15$ m να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς k.

Λύση

Ισχύει ότι: $\alpha = \frac{d\dot{x}}{dt} \Rightarrow \alpha(x) = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \alpha(t) = \frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x}$, άρα

$\alpha(x)dx = \dot{x}d\dot{x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}_1} \dot{x}\,d\dot{x} = \int_{x_0}^{x_1} \alpha(x)\,dx \Rightarrow \int_{2.5}^{5} \dot{x}\,d\dot{x} = \int_0^{0.15} 200x(1 + kx^2)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{x}^2}{2}\Big|_{2.5}^{5} = 200\left[\frac{x^2}{2} + \frac{kx^4}{4}\right]_0^{0.15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5^2}{2} - \frac{2.5^2}{2} = 100\, 0.15^2 + 50\, k\, 0.15^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{k = 281 \frac{1}{m^2}}$$

Άσκηση 16 (φυλ. 7)

Η επιτάχυνση ενός σωματιδίου (υλικού σημείου) που κινείται στον άξονα x δίνεται από την σχέση $\ddot{x}(x) = k(1-e^{-x})$, όπου $x=x(t)$ με k σταθερά. Γνωρίζοντας ότι η ταχύτητα του σωματιδίου είναι $\dot{x} = +9\, m/s$ όταν $x=-3m$ και ότι το σωματίδιο σταματά στην αρχή των αξόνων ($x=0$), να υπολογισθεί: (α) η τιμή του k, (β) η ταχύτητα του σωματιδίου όταν $x=-2m$.

λύση

(α) Η επιτάχυνση είναι συνάρτηση της απόστασης x, $\ddot{x}(x) = \alpha(x)$

$$\alpha(x) = \ddot{x}(x) = \frac{d\dot{x}}{dt} \Rightarrow \alpha(x) = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \alpha(x) = \frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x}, \text{ άρα } \alpha(x)dx = \dot{x}d\dot{x}$$

$$\Rightarrow \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}_1} \dot{x}\, d\dot{x} = \int_{x_0}^{x_1} \ddot{x}(x)\, dx \Rightarrow \int_9^0 \dot{x}\, d\dot{x} = \int_{-3}^0 k(1-e^{-x})dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{x}^2}{2}\Big|_9^0 = k\left[x + e^{-x}\right]_{-3}^0 \Rightarrow 0 - \frac{9^2}{2} = k\left[0 + \cancel{e^{-0}}^{\,1} - (-3) - e^3\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{9^2}{2} = k(4-e^3) \Rightarrow k = -\frac{(4-e^3)9^2}{2} \Rightarrow \boxed{k = 2.52\, m/s^2}$$

(β) Αφού έχει υπολογισθεί η σταθερά k, μπορούμε να γράψουμε:

$$\int_0^{\dot{x}} \dot{x}\, d\dot{x} = \int_0^x 2.52(1-e^{-x})dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{x}^2}{2} = \left[2.52(x - e^{-x})\right]_0^x = 2.52(x + e^{-x} - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2 = 5.03\,(x+e^{-x}-1) \Rightarrow \dot{x} = \pm 2.24\,(x+e^{-x}-1)^{1/2}$$

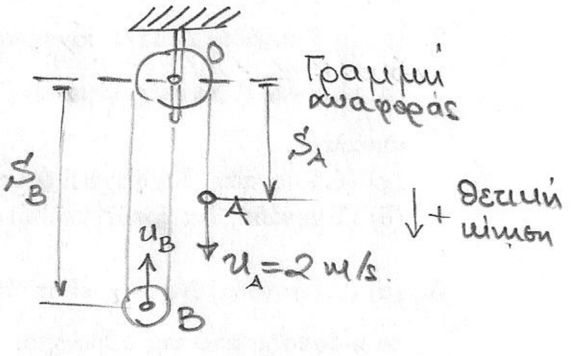
Οπότε για x=−2m έχουμε ότι:

$$\dot{x} = \pm 2.24\,(-2+e^{2}-1)^{1/2} \Rightarrow \dot{x} = \pm 4.7 \text{ m/s}$$

Αφού το x ξεκινάει στο x=−2m και σταματάει στο x=0 σημαίνει ότι η ταχύτητα είναι θετική (βλέπε ερώτημα (α)) οπότε κρατάω την θετική τιμή της ταχύτητας.

Άσκηση 17 Έχουμε σχοινί σταθερού μήκους σταθεροποιημένο στο σημείο Ο. Τραβώντας το σχοινί στην θέση Α (βλέπε σχήμα) με ταχύτητα $u=2$ m/s, να υπολογιστεί η ταχύτητα του σημείου Β.
(Η ακτίνα των τροχαλιών θεωρείται αμελητέα)

Σχήμα



Λύση

Το συνολικό μήκος, l, του σχοινιού θα είναι: $l = 2s_B + s_A$, (1)

Επειδή το μήκος του σχοινιού, l, είναι σταθερό, αν παραγωγίσω την (1) ως προς t θα έχω ότι:

$$\frac{dl}{dt} = 2\frac{ds_B}{dt} + \frac{ds_A}{dt} \Rightarrow 0 = 2u_B + u_A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_B = -\frac{u_A}{2} \Rightarrow \boxed{u_B = -1 \text{ m/s}}$$

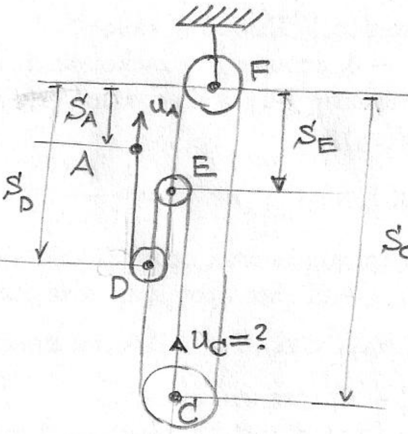
Άσκηση 18 (φυλ. 8) (ADE, DEC, DCFE)

Έχουμε τρία σχοινιά με σταθερά μήκη και το σημείο F είναι σταθεροποιημ. Αν το σημείο A του σχοινιού κινείται προς τα πάνω με ταχύτητα

$u_A = -14$ m/s, να υπολογιστεί η ταχύτητα του σημείου C.

(Η ακτίνα των τροχαλιών θεωρείται αμελητέα)

Λύση **Σχήμα**



Όπου α_1 = μήκος σχοινιού ADE,

α_2 = μήκος σχοινιού DEC,

α_3 = μήκος σχοινιού DCFE.

$$\alpha_1 = (S_D - S_A) + (S_D - S_E)$$

$$\alpha_2 = (S_D - S_E) + (S_C - S_E)$$

$$\alpha_3 = (S_C - S_D) + S_C + S_E$$

Επειδή τα παραπάνω μήκη διατηρούνται σταθερά, παραγωγίζοντας τις παραπάνω σχέσεις ως προς t έχουμε ότι:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\alpha_1}{dt} = 2\dfrac{dS_D}{dt} - \dfrac{dS_A}{dt} - \dfrac{dS_E}{dt} \Rightarrow 0 = 2u_D - u_A - u_E \\ \dfrac{d\alpha_2}{dt} = \dfrac{dS_D}{dt} + \dfrac{dS_C}{dt} - 2\dfrac{dS_E}{dt} \Rightarrow 0 = u_D + u_C - 2u_E \\ \dfrac{d\alpha_3}{dt} = 2\dfrac{dS_C}{dt} - \dfrac{dS_D}{dt} + \dfrac{dS_E}{dt} \Rightarrow 0 = 2u_C - u_D + u_E \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2u_D - u_A - u_E = 0 \\ u_D + u_C - 2u_E = 0 \\ 2u_C - u_D + u_E = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u_C = -2 \text{ m/s} \\ u_D = -10 \text{ m/s} \\ u_E = -6 \text{ m/s} \end{array}$$

Οπότε $u_C = -2$ m/s

$\boxed{\text{Άσκηση 19}}$ (Φυλ. 9)

Το διάνυσμα θέσης υλικού σημείου δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{r} = \alpha\cos\omega t\,\vec{x_0} + \alpha\sin\omega t\,\vec{y_0} + bt\,\vec{z_0}$$ όπου α, b

και ω σταθερές. Να δ.ο. η τροχιά του υλικού σημείου είναι έλικα. Να βρεθούν τα μέτρα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του υλικού σημείου.

Λύση.

Γενικά ισχύει:

$$\vec{r} = x\,\bar{x_0} + y\,\bar{y_0} + z\,\bar{z_0} \quad (1)$$

Για την παρούσα άσκηση ισχύει ότι:

$$\vec{r} = \alpha\cos\omega t\,\bar{x_0} + b\sin\omega t\,\bar{y} + bt\,\bar{z_0} \quad (2)$$

Συγκρίνοντας τις (1) και (2) ισχύει ότι:

$$x = \alpha\cos\omega t, \quad y = b\sin\omega t, \quad z = bt \qquad (3)$$

Απαλείφοντας το t μεταξύ των δύο πρώτων εξισώσεων της (3) προκύπτει: $x^2 + y^2 = \alpha^2$

Οι εξισώσεις $x^2 + y^2 = \alpha^2$ και $z = bt$ μας δείχνουν ότι η τροχιά του υλικού σημείου είναι έλικα

Η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι ίση με:

$$\vec{u} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \alpha\omega\cos\omega t\,\bar{x_0} - \alpha\omega\sin\omega t\,\bar{y_0} + b\,\bar{z_0}$$

Συνεπώς το μέτρο της ταχύτητας θα είναι ίσο με

$$|\vec{u}| = \sqrt{(\alpha\omega\cos\omega t)^2 + (-\alpha\omega\sin\omega t)^2 + b^2} = \sqrt{\alpha^2\omega^2 + b^2}$$

Η επιτάχυνση του υλικού σημείου είναι ίση με:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{u}}{dt} = -\alpha\omega^2\sin\omega t\,\bar{x_0} - \alpha\omega^2\cos\omega t\,\bar{y_0}$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης θα είναι ίσο με:

$$|\bar{\alpha}| = \sqrt{(-\alpha\omega^2\sin\omega t)^2 + (-\alpha\omega^2\cos\omega t)^2} = \sqrt{\alpha^2\omega^4} = |\alpha|\omega^2$$

Άσκηση 20

Υλικό σημείο κινείται στο επίπεδο Oxy, έτσι ώστε οι συνιστώσες της θέσης του να πληρούν τις σχέσεις:

$$x(t) = 5t^2 \quad \text{και} \quad y(t) = 3t$$

Να βρεθεί η τροχιά του υλικού σημείου ως $y = y(x)$.

Λύση

$\left.\begin{array}{l} x(t)=5t^2 \\ y(t) = 3t \end{array}\right\}$, για να βρω την τροχιά ως $y=y(x)$, πρέπει να γίνει απαλοιφή του t.

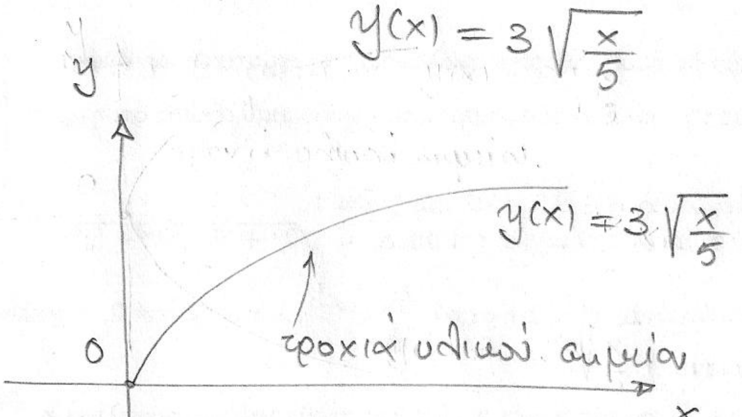
$$y = 3t \Rightarrow t = \frac{y}{3}, \quad x = 5t^2 \Rightarrow x = 5\left(\frac{y}{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 5\frac{y^2}{9} \Rightarrow x = \frac{5}{9}y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{9x}{5} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{9x}{5}}$, επειδή $t>0 \Rightarrow y>0$ επομένως

$$y(x) = 3\sqrt{\frac{x}{5}}$$

Σχηματικά η τροχιά θα είναι:



Άσκηση 21 (Φυλ.10)

Υλικό σημείο κινείται στο επίπεδο Oxy και η ταχύτητά του είναι ίση με $\vec{u} = 3\bar{x_0} + 10t\,\bar{y_0}$.
Αν για $t=0$, βρίσκονται στην αρχή των αξόνων να βρεθεί η τροχιά του υλικού σημείου ως y συνάρτηση του x, $y=y(x)$.

Λύση.

Αφού $\vec{u} = 3\bar{x_0} + 10t\,\bar{y_0}$, προκύπτει ότι: $\dot{x}=3$ και $\dot{y}=10t$. (1)

Για να υπολογίσω τις θέσεις $x(t)$ και $y(t)$ του υλικού σημείου ολοκληρώνω τις (1) και έχω:

$$\int \dot{x}\,dt = \int 3dt \Rightarrow \int \frac{dx}{dt}dt = \int 3dt \Rightarrow x(t) = 3t + c_1 \quad (2)$$

$$\int \dot{y}\,dt = \int 10t\,dt \Rightarrow \int \frac{dy}{dt}dt = \int 10t\,dt \Rightarrow y(t) = 10\frac{t^2}{2} + c_2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y(t) = 5t^2 + c_2$ (3), όπου c_1, c_2 σταθερές της ολοκλήρ.

Για τον υπολογισμό των c_1 και c_2 χρησιμοποιώ τις αρχικές συνθήκες
Δηλαδή:

για $t=0$, $x=0$ από (2) $\Rightarrow 0 = 3.0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$

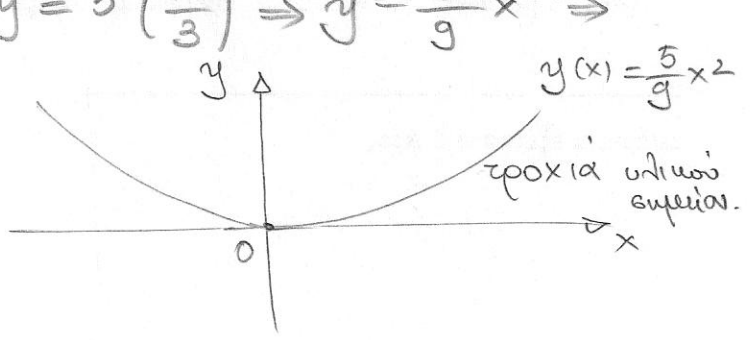
για $t=0$, $y=0$ από (3) $\Rightarrow 0 = 5.0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$

Άρα οι (2) και (3) γίνονται: $\begin{cases} x(t) = 3t \\ y(t) = 5t^2 \end{cases}$

Για να βρω την τροχιά $y=y(x)$ πρέπει να γίνει απαλοιφή του t.

$x(t) = 3t \Rightarrow t = \frac{x}{3}$ και $y = 5\left(\frac{x}{3}\right)^2 \Rightarrow y = \frac{5}{9}x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y(x) = \frac{5}{9}x^2$, σχηματικά



Άσκηση 22 (Φυλ. 11)

Υλικό σημείο κινείται στο επίπεδο Oxy έτσι, ώστε οι συντεταγμένες της θέσης του να πληρούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 5 + 7\cos t \\ y(t) &= 6 + 8\sin t \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Να βρεθεί η τροχιά του υλικού σημείου ως $y = y(x)$.

Λύση

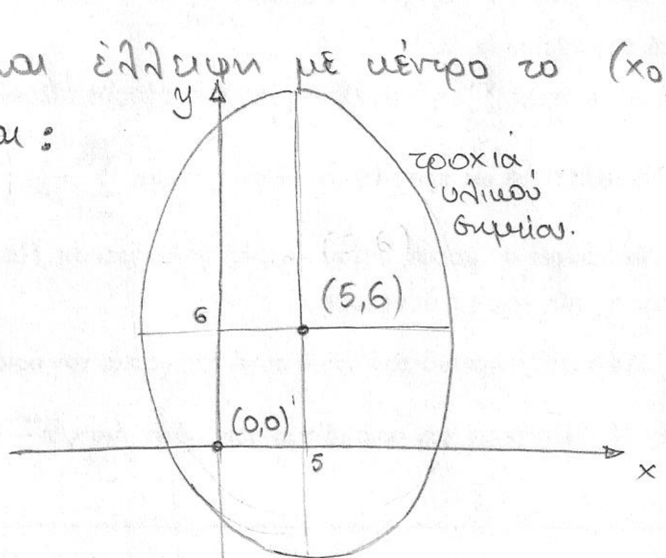
Από σχέση (1) έχω ότι: $\left\{\begin{aligned} x &= 5 + 7\cos t \\ y &= 6 + 8\sin t \end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} x-5 &= 7\cos t \\ y-6 &= 8\sin t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \frac{x-5}{7} &= \cos t \\ \frac{y-6}{8} &= \sin t \end{aligned}\right\}$$ υψώνω και τα δύο μέλη στο τετράγωνο $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} \frac{(x-5)^2}{7^2} &= \cos^2 t \\ \frac{(y-6)^2}{8^2} &= \sin^2 t \end{aligned}\right\}$$ $\Rightarrow$ προσθέτω κατά μέλη $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1} = \frac{(x-5)^2}{7^2} + \frac{(y-6)^2}{8^2} \Rightarrow \boxed{\frac{(x-5)^2}{7^2} + \frac{(y-6)^2}{8^2} = 1}$$

οπότε η τροχιά είναι έλλειψη με κέντρο το $(x_0, y_0) = (5,6)$ και σχηματικά είναι:



Άσκηση 23 (Φυλ 12)

Υλικό σημείο κινείται στο επίπεδο Oxy, έτσι ώστε οι συντεταγμένες της θέσης του να πληρούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 2\tan t \\ y(t) &= \tan 2t \end{aligned}\right\} \text{ με περιορισμό } \quad x \in (-2, 2)$$

Να βρεθεί η τροχιά του υλικού σημείου ως $y = y(x)$.

__Λύση__

Από την πρώτη σχέση έχω ότι: $\tan t = \frac{x}{2}$ (1).

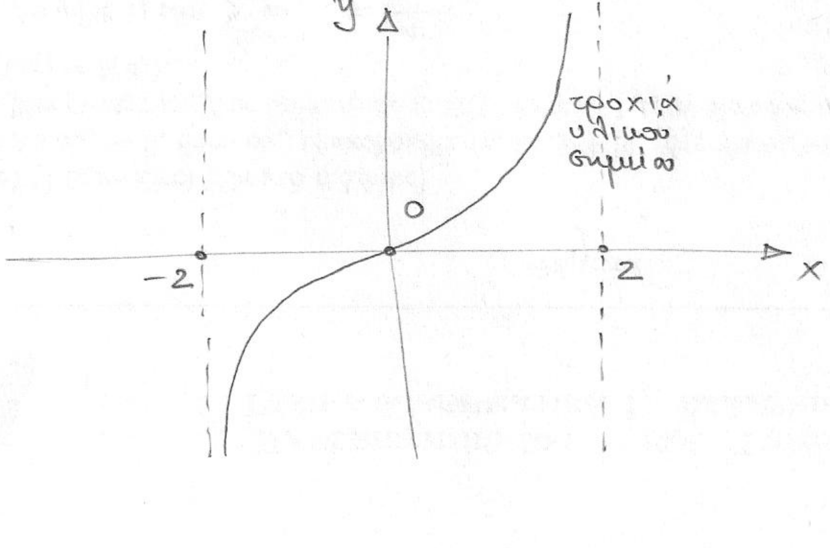
Ισχύει ότι: $\tan 2t = \frac{2\tan t}{1-\tan^2 t}$, δηλαδή $y(t) = \tan 2t = \frac{2\tan t}{1-\tan^2 t} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1-\tan^2 t)\,y = 2\tan t \Rightarrow$ από (1) $\Rightarrow \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) y = \cancel{2}\,\frac{x}{\cancel{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{x}{1 - \frac{x^2}{4}} \Rightarrow y(x) = \dfrac{x}{\frac{4-x^2}{4}} \Rightarrow y(x) = \dfrac{4x}{4-x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y(x) = \dfrac{4x}{(2-x)(2+x)}$, με $x \neq \pm 2$ (ισχύει από περιορισμό)

Σχηματικά η τροχιά του υλικού σημείου θα είναι:



Άσκηση 24 (Φυλ. 13)

Υλικό σημείο κινείται στο επίπεδο Οxy, έτσι ώστε οι συνιστώσες της ταχύτητας του να πληρούν τις σχέσεις:

$$\dot{x} = 2y \quad , \quad \dot{y} = 8x \qquad (1)$$

α) Να βρεθεί η τροχιά του υλικού σημείου.

β) Να βρεθεί η κατεύθυνση της επιτάχυνσης.

Λύση

κανόνας αλυσίδας.

α) $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\dot{x} \Rightarrow$

Σε αυτή τη διαφορική εξίσωση οι μεταβλητές χωρίζονται, δηλ.

$\Rightarrow \dot{y} = \dfrac{dy}{dx}\dot{x} \Rightarrow 8x = \dfrac{dy}{dx} 2y \Rightarrow 8x\,dx = 2y\,dy \Rightarrow$

$\Rightarrow \int 8x\,dx = \int 2y\,dy \Rightarrow \dfrac{\cancel{8}^{4} x^2}{\cancel{2}} = \dfrac{\cancel{2}y^2}{\cancel{2}} + c \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 = y^2 + c \Rightarrow y^2 = 4x^2 + c_1 \Rightarrow y^2 - 4x^2 = c_1$

β) Η επιτάχυνση θα είναι της μορφής: $\vec{\alpha} = \ddot{x}\,\bar{x}_0 + \ddot{y}\,\bar{y}_0$

όμως $\ddot{x} = 2\dot{y} = 2(8x)$ από σχέση (1) οπότε:

$\ddot{x} = 16x$ και $\ddot{y} = 8\dot{x} = 8(2y)$ από σχέση (1)

οπότε $\ddot{y} = 16y$

Επομένως $\bar{\alpha} = 16x\,\bar{x}_0 + 16y\,\bar{y}_0$

Άσκηση 25 (Φυλ. 14)

Σωμάτιο, Α, κινείται στον χώρο και το διάνυσμα θέσης του είναι: $\vec{r}_A = (e^t+2, t^2, t+1)$. Σωμάτιο, Β, επίσης κινείται στον χώρο και έχει διάνυσμα θέσης: $\vec{r}_B = \left(2t+3, \frac{3}{2}t^2, 3t+1\right)$. Τα σωμάτια Α και Β θα συγκρουστούν στον χώρο και σε ποιά θέση;

Λύση

Τα σωμάτια Α και Β θα συγκρουστούν αν και τα δύο θα έχουν την ίδια θέση στην ίδια χρονική στιγμή, t. Τότε θα ισχύει για τα διανύσματα θέσης τους:

$$\vec{r}_A(t) = \vec{r}_B(t) \Rightarrow (e^t+2, t^2, t+1) = \left(2t+3, \frac{3}{2}t^2, 3t+1\right) \quad (1)$$

Η εξίσωση (1) δίνει το παρακάτω σύστημα τριών εξισώσεων:

$$\left\{\begin{aligned} e^t+2 &= 2t+3 \\ t^2 &= \frac{3}{2}t^2 \\ t+1 &= 3t+1 \end{aligned}\right\}$$

η μόνη λύση του συστήματος είναι για $t=0$. Τα σωμάτια Α και Β θα συγκρουστούν τη χρονική στιγμή $t=0$, δηλαδή $\vec{r}_A(0) = \vec{r}_B(0) = (3,0,1)$

Άσκηση 27

Ένα πλοίο (υλικό σημ.) Α ταξιδεύει προς νότο με ταχύτητα 16 km/hr, ενώ ένα άλλο πλοίο (υλικό σημείο) Β, 32 km νότια του Α, ταξιδεύει ανατολικά με ταχύτητα 12 km/hr.

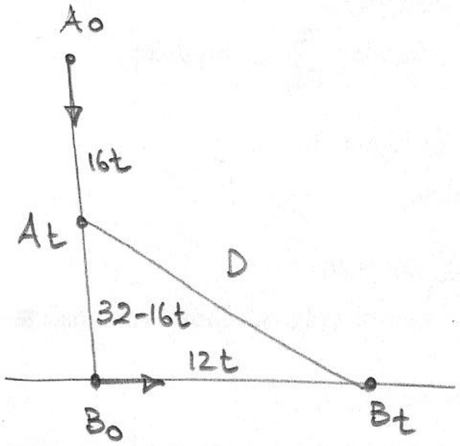
(α) Με ποια ταχύτητα πλησιάζουν ή απομακρύνονται τα πλοία αυτά μεταξύ τους 1 hr μετά από τη στιγμή που ξεκίνησαν;

(b) Μετά από 2 hr;

(c) Πότε τα πλοία αυτά σταματούν να πλησιάζουν μεταξύ τους και ποια είναι η απόσταση τους εκείνη τη χρονική στιγμή;

Λύση

Σχηματικά:



Έστω Ao και Bo οι αρχικές θέσεις των δύο πλοίων και At και Bt οι θέσεις τους t ώρες αργότερα, οπότε η απόσταση τους είναι D. Έχουμε:

$$D^2 = (32-16t)^2 + (12t)^2 \quad \text{και} \quad \frac{dD}{dt} = \frac{400t - 512}{D}$$

(α) Για $t = 1h$ είναι $D = 20$ και $dD/dt = -5.6$

Συνεπώς τα πλοία πλησιάζουν με σχετική ταχύτητα 5.6 km/h.

(b) Για $t = 2h$ είναι $D = 24$ και $dD/dt = 12$

Συνεπώς τα πλοία απομακρύνονται με σχετική ταχύτητα 12 km/h

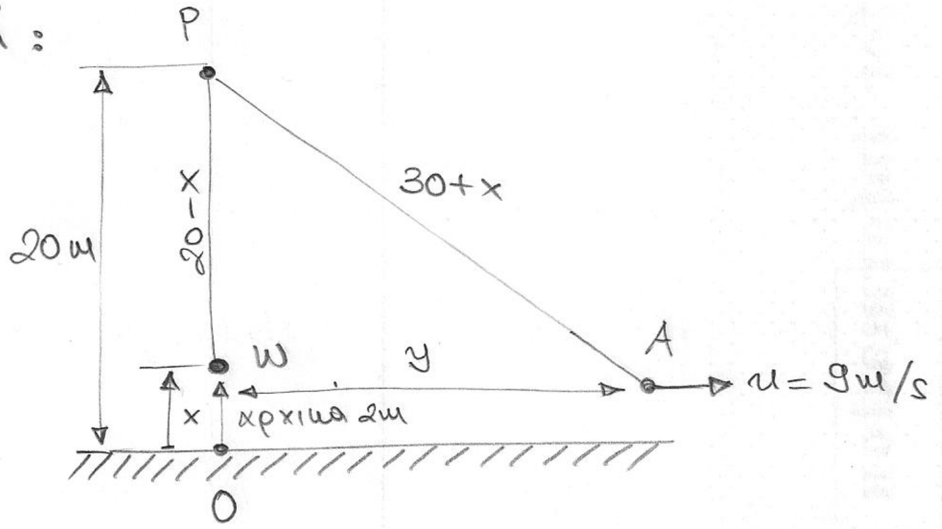
(c) Τα πλοία θα σταματήσουν να πλησιάζουν μεταξύ τους όταν $dD/dt = 0$, δηλαδή όταν $t = 512/400 = 1.28$ hr, και τότε θα απέχουν μεταξύ τους απόσταση $D = 19.2$ km

Άσκηση 28 (Φυλ. 15)

Υλικό σημείο W είναι δεμένο στο άκρο ενός σχοινιού μήκους 50m, που περνά από μια τροχαλία στο σημείο P, 20m πάνω από το έδαφος. Το άλλο άκρο του σχοινιού δένεται σε όχημα στο σημείο A, 2m πάνω από το έδαφος. Αν το όχημα κινείται με ταχύτητα 9m/s κατά τον y-άξονα, με ποιά ταχύτητα υψώνεται το υλικό σημείο, τη χρονική στιγμή που αυτό είναι 6m πάνω από το έδαφος;

Λύση

Σχηματικά:



Έστω ότι την τυχαία χρονική στιγμή, t, το βάρος έχει ανυψωθεί κατά x και έστω y η οριζόντια απόσταση του σημείου A, στο οποίο δένεται το σχοινί στο όχημα, από την κατακόρυφη ευθεία που περνάει από την τροχαλία στο σημείο P.

Την τυχαία χρονική στιγμή, t, θα ισχύει για την θέση του υλικού σημείου W πάνω στο PO:

$PO = PW + WO = (20-x)+(x-2)$

Θεωρούμε ότι το τρίγωνο OPA είναι ορθογώνιο: $y^2=(30+x)^2-$
$-[(20-x)+(x-2)]^2 \Rightarrow y^2=(30+x^2)-18^2$ (1)

Από την (1) $\Rightarrow 2y\frac{dy}{dt}=2(30+x)\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{30+x}{y}\frac{dx}{dt}$ (2)

Για $x=6$ (όταν το σώμα είναι 6 m πάνω από το έδαφος)

είναι από (1): $y^2=(30+6^2)-18^2 \Rightarrow y=18\sqrt{3}$

και από (2) και επειδή το όχημα κινείται με 9 m/s, δηλ.

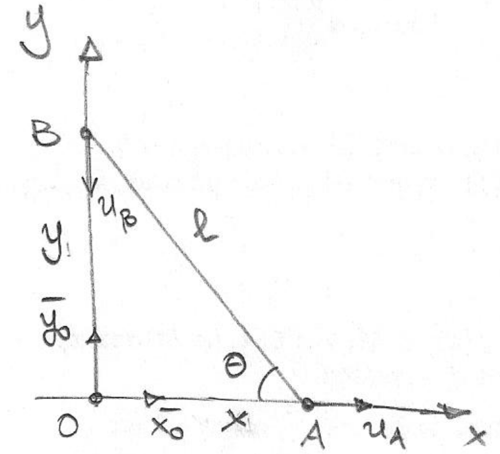
$$\frac{dy}{dt}=9 \text{ έχουμε: } 9=\frac{30+6}{18\sqrt{3}}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt}=\frac{9}{2}\sqrt{3}\ m/s}$$

$\boxed{\text{Άσκηση 29}}$ (Φυλ. 16)

Το άκρο, Α, ράβδου ΑΒ κινείται με ταχύτητα $\vec{u}_A = u_A \vec{x}_0$, $(u_A > 0)$.
Ζητείται η ταχύτητα του άκρου Β, όταν η γωνία $\theta = \theta_1$.
Δίνεται το μήκος l της ράβδου.

Λύση

Σχηματικά:



Θέτουμε $OA = x$ και $OB = y$, οπότε έχουμε ότι:

$$x^2 + y^2 = l^2 \qquad (1)$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο την (1) έχουμε:

$$\cancel{2}x \frac{dx}{dt} + \cancel{2}y \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt} \qquad (2)$$

Όμως $\frac{dy}{dt} = u_B$, $\frac{dx}{dt} = u_A$ και $\frac{x}{y} = \cot\theta$ (3)

Από τις (2) και (3) για γωνία $\theta = \theta_1$ προκύπτει ότι η ταχύτητα του άκρου Β είναι ίση με:

$$u_B = -\cot\theta_1 \, u_A, \quad (u_A > 0)$$

Άσκηση 30 (Φυλ. 17)

Η επιτάχυνση υλικού σημείου για κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$, δίνεται από

$$\vec{\alpha} = 12\cos 2t\,\overline{x_0} - 8\sin 2t\,\overline{y_0} + 16t\,\overline{z_0} \quad (1)$$

Αν το υλικό σημείο ηρεμεί στην αρχή των αξόνων για $t=0$, να βρεθούν τα $\vec{u}$, και $\vec{r}$ κάθε χρονική στιγμή.

Λύση

Ολοκληρώνοντας την (1) έχουμε ότι:

$$\vec{u} = \int \frac{d\bar{u}}{dt}dt = \overline{x_0}\int 12\cos 2t\,dt + \overline{y_0}\int(-8\sin 2t)dt +$$

$$+ \overline{z_0}\int 16t\,dt =$$

$$= 6\sin 2t\,\overline{x_0} + 4\cos 2t\,\overline{y_0} + 8t^2\,\overline{z_0} + c$$

Θέτοντας $\vec{u}=0$ όταν $t=0$, έχουμε ότι $0 = 0\,\overline{x_0} + 4\,\overline{y_0} + 0\,\overline{z_0} + c$

οπότε $c = -4\,\overline{y_0}$, οπότε η ταχύτητα, $\vec{u}$, είναι:

$$\vec{u} = 6\sin 2t\,\overline{x_0} + (4\cos 2t - 4)\,\overline{y_0} + 8t^2\,\overline{z_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{r}}{dt} = 6\sin 2t\,\overline{x_0} + (4\cos 2t - 4)\,\overline{y_0} + 8t^2\,\overline{z_0} \quad (2)$$

Ολοκληρώνοντας την (2) έχουμε ότι:

$$\vec{r} = \int \frac{d\bar{r}}{dt}dt = \overline{x_0}\int 6\sin 2t + \overline{y_0}\int(4\cos 2t - 4)dt + \overline{z_0}\int 8t^2 dt$$

$$= -3\cos 2t\,\overline{x_0} + (2\sin 2t - 4t)\,\overline{y_0} + \frac{8}{3}t^3\,\overline{z_0} + c_2$$

Θέτοντας $\vec{r}=0$ όταν $t=0$, έχουμε ότι $0 = -3\,\overline{x_0} + 0\,\overline{y_0} + 0\,\overline{z_0} + c_2$

οπότε $c_2 = 3\,\overline{x_0}$, οπότε το διάνυσμα θέσης, $\vec{r}$, είναι:

$$\vec{r} = (3 - 3\cos 2t)\,\overline{x_0} + (2\sin 2t - 4t)\,\overline{y_0} + \frac{8}{3}t^3\,\overline{z_0} \quad (3)$$